27.12.2013

מותר להשתמש בדפי הנוסחאות המצורפים

הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
המרכז ללמודים קדם-אקדמיים

מבחן טרימסטר א׳ במתמטיקה

משך המבחן 3 שעות. יש לפתור את כל השאלות!
אין להשתמש במחשבונים! אין לצאת ב-45 הדקות האחרונות של המבחן!
בכל שאלה חובה למצוא את כל התשובות. חובה לנמק כל תשובה ולפשטה בכל הניתן!
כל נוסחה שנעשה בה שימוש ואינה מופיעה בדף הנוסחאות – חייבת הוכחה!
יש לפתור את שאלות 1 ו-6 רק באמצעות גיאומטרית-המישור.
כל משפט בגיאומטרית המישור שנעשה בו שימוש ושאינו מופיע ברשימת המשפטים - חייב הוכחה!
תזכורת! – חובה לשרטט בעזרת סרגל ומחוגה ולא ביד חופשית!

שאלה 1 – 18%

בטרפז שווה-שוקיים $ABCD$ הבסיסים $AD=8, BC=4$. שטח הטרפז הוא 21.

7% א. מה אורך השוק של הטרפז?

7% ב. הוכח ש- $\sphericalangle CAD > \sphericalangle BAC$.

4% ג. האם חוצה-זווית $\sphericalangle A$ חותך את הבסיס BC או את הצלע DC? נמק!

שאלה 2 – 16%

8% א. פתור: $\frac{4x^2-9x+2}{1+\log_2 x} > 0$.

8% ב. עבור אילו ערכים של m יש למשוואה $2(3-m)x^2+4(1-m)x+|2m-5| = 2m+7$ שני פתרונות בעלי סימנים שונים?

שאלה 3 – 14%

8% א. שרטט גרף הפונקציה $y=\left|\frac{|x|-3}{|x|-1}\right|$.

6% ב. עבור אילו ערכים של m למשוואה $\big||x|-3\big| = m\big||x|-1\big|$ יש
1) שני פתרונות. 2) שלושה פתרונות. 3) ארבעה פתרונות.

שאלה 4 – 20%

10% א. מצא את כל הפתרונות של האי-שוויון $\log_{\frac{x-1}{x+5}} 0.3 > 0$
הנמצאים בתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)=\sqrt{5-x-\frac{6}{x}}$.

10% ב. פתור: $9^{\sqrt{x}+0.5} - 39\cdot 3^{\frac{x+1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}} + 12 = 0$.

שאלה 5 – 16%

7% א. הוכח שהאי-שוויון $\sqrt{x^2-2x+3} > \sqrt{2\sqrt{x^2-2x+2}}$ מתקיים לכל $x \neq 1$.

3% ב. 1) שרטט $y=|\log_3 x|$.

6% 2) מהו מספר הפתרונות של המשוואה $|\log_3 x| = -x^2+2x+a$ עבור כל ערך ממשי של a?

שאלה 6 – 16%

על הצלע AB במשולש ABC בוחרים נקודה D ומעבירים דרכה ישר המקביל ל- AC והותך את BC בנקודה E. O היא נקודת החיתוך של DC ושל AE.
דרך O מעבירים קטע MN המקביל ל- AC כאשר $M\in AB, N\in BC$. הוכח:

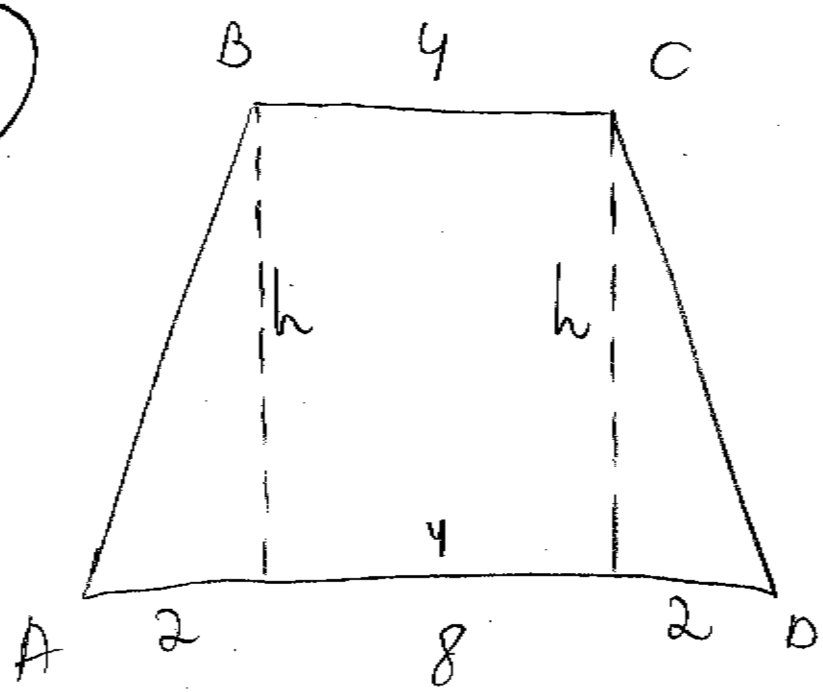
8% א. $MO=NO$

8% ב. התיכון מקדקוד B עובר דרך נקודה O.

בהצלחה!

אלחן

ב



$$\frac{(4+8)\cdot h}{2} = 21$$

$$12 \cdot h = 42$$

$$h = \frac{42}{12} = \frac{7}{2}$$

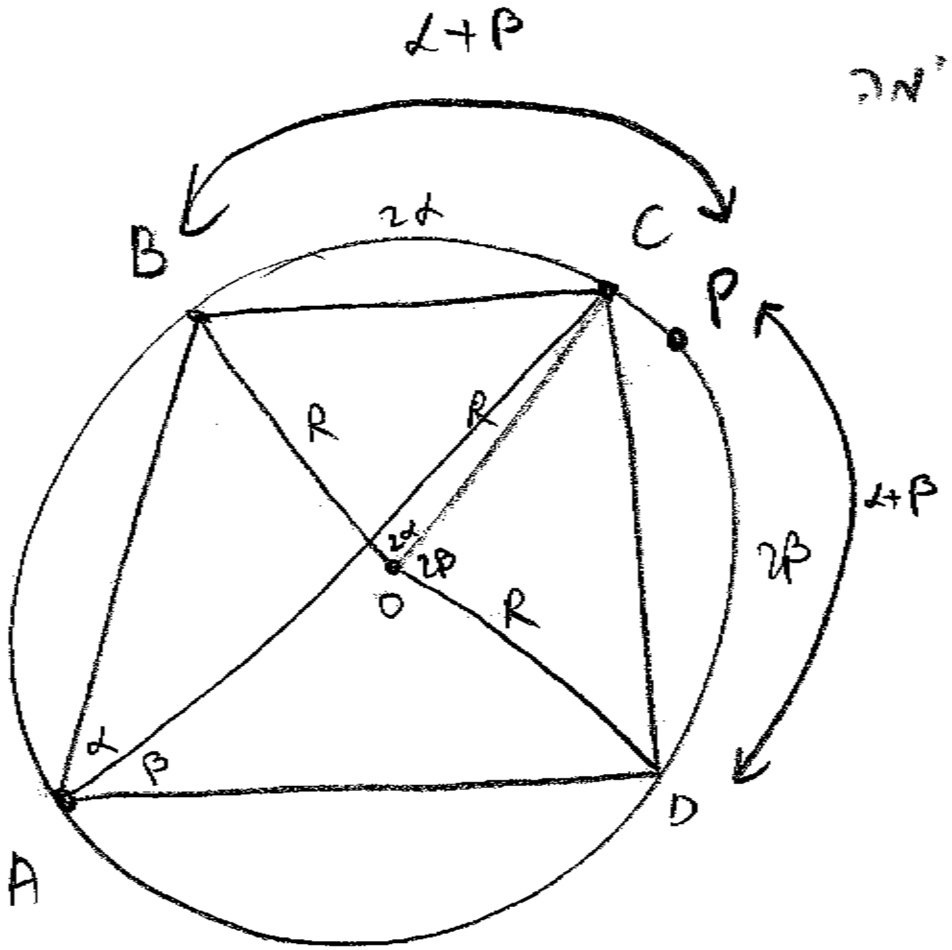
$$\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 2^2 = CD^2$$

$$\frac{49}{4} + 4 = CD^2$$

$$\frac{49+16}{4} = \frac{65}{4} = CD^2$$

$$4 = \frac{\sqrt{64}}{2} < \boxed{\frac{\sqrt{65}}{2} = CD}$$

ג) המרש"ם סוף הזווית הנשקיית
שאז לפין הגורל בו רו"מה
כמסומן.



$BC < CD$ (נתון)

$\Downarrow$

$\overset{\frown}{BC} < \overset{\frown}{CD}$ (קשתות)

$\Downarrow$

$\measuredangle BOC < \measuredangle COD$ (מרכזיות)

$\Downarrow$

$\measuredangle BAC < \measuredangle CAD$ (היקפית שווה למחצית מרכזית)

ד) חוצה הזווית A יחלק את קשת $\overset{\frown}{BCD} = 2\alpha+2\beta$ לשתי קשתות שוות. (כל אחת $\alpha+\beta$). $2\beta > 2\alpha \Leftarrow \beta > \alpha \Leftarrow$ אמצע הקשת יהיה נקודה על קשת $\overset{\frown}{CD}$.ש.ע.מ P. $\Leftarrow$ חוצה זווית A חותך את CD.

2, [illegible]

(1) $\dfrac{4x^2 - 9x + 2}{1 + \log_2 x} > 0$

$4x^2 - 8x - x + 2$

$4x(x-2) - 1(x-2)$

$(x-2)(4x-1)$

$x = 2 \qquad x = \frac{1}{4}$

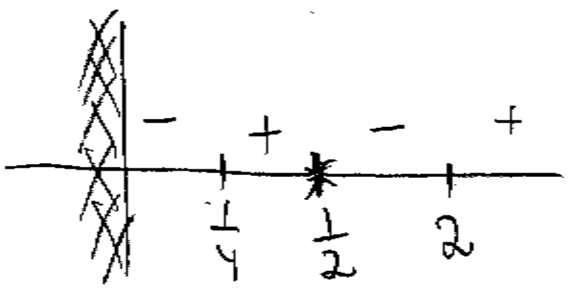
$x > 0$

$1 + \log_2 x \neq 0$

$\log_2 x \neq -1$

$2^{-1} \neq x$

$x \neq \frac{1}{2}$



[illegible] $x > 2$

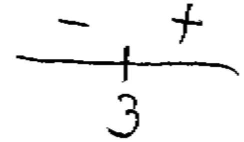
$\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$

7

$$2(3-m)x^2+4(1-m)x+|2m-5|-(2m+7)=0$$

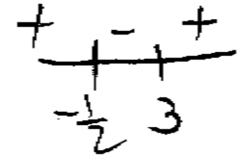
$$\frac{c}{a}=\frac{|2m-5|-(2m+7)}{2(3-m)}<0$$

$m>\frac{5}{2}$ $\quad \frac{2m-5-2m-7}{3-m}<0 \Rightarrow \frac{-12}{3-m}<0$



$m<3$

$m\le\frac{5}{2}$ $\quad \frac{-2m+5-2m-7}{3-m}<0 \quad \frac{-4m-2}{3-m}<0$

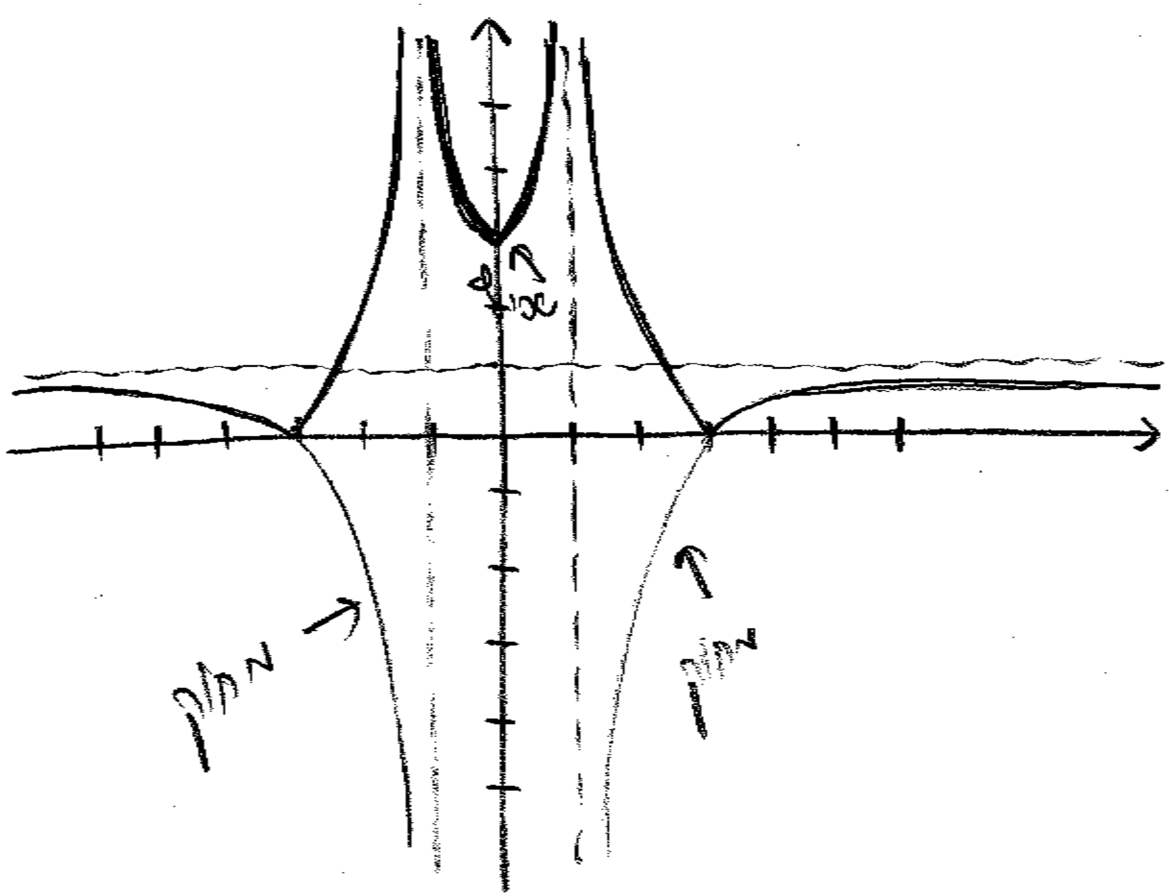


$-\frac{1}{2}<m<3$

$$\boxed{-\frac{1}{2}<m<3}$$

(ג) $y = \begin{cases} x > 0 \Rightarrow y = \dfrac{x-3}{x-1} & x \neq 1 \quad y = 1 \quad (0,3) \quad (3,0) \\ x \leq 0 \Rightarrow y = \dfrac{-x-3}{-x-1} = \dfrac{x+3}{x+1} & x \neq -1 \quad y = 1 \quad (0,3) \quad (-3,0) \end{cases}$

3 נק'



(ד) מאור חלק
לא מתכלק כיסון

$$\left| \frac{|x|-3}{|x|-1} \right| = m$$

$m=0$ $1 \leq m < 3$	שני פתרונ'
$m = 3$	אחד פתרונ'
$0 < m < 1$ $m > 3$	אפס פתרונ'

ג   שאלה 4

$x<-5$ או $x>1$ ← ת.ה

$$\log_{\frac{x-1}{x+5}} 0.3 > \log_{\frac{x-1}{x+5}} 1$$

$$\left(\frac{x-1}{x+5}-1\right)(0.3-1)>0$$

$$\left(\frac{x-1-x-5}{x+5}\right)(-0.7)>0$$

$$\frac{(-6)(-0.7)}{x+5}>0$$

$$\frac{1}{x+5}>0$$

$-\quad -5 \quad +$

$$\boxed{x>-5}$$

$+ \quad -5 \quad - \quad 1 \quad +$

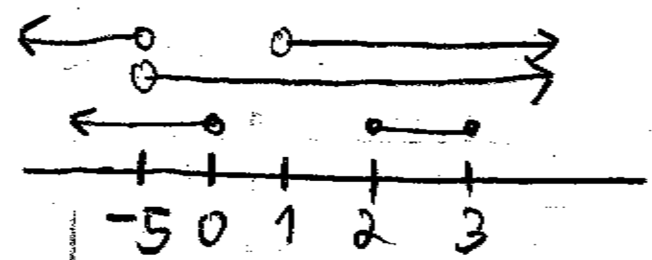
$$\frac{x-1}{x+5}>0$$

$$\frac{x-1}{x+5}\neq 1$$

$$x-1\neq x+5$$

$$-1\neq 5$$

$x \neq 0$



$$\boxed{2\le x\le 3}$$

כיוון | סופי

כן תק

$$5-x-\frac{6}{x}\ge 0$$

$$\frac{-x^2+5x-6}{x^2}\ge 0$$

$$\frac{x^2-5x+6}{x}\le 0$$

$$\frac{(x-2)(x-3)}{x}\le 0$$

$- \quad 0 \quad + \quad 2 \quad - \quad 3 \quad +$

$$\boxed{2\le x\le 3}$$

$$\boxed{x<0}$$

שאלה 4:

ב

$x \geq 0$

$x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$

אסור
[illegible]

$$9^{\sqrt{x}+\frac{1}{2}} - 39 \cdot 3^{\frac{x+1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}} + 12 = 0$$

$$9^{\sqrt{x}} \cdot 3 - 39 \cdot 3^{\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}-1}} + 12 = 0$$

$$3^{2\sqrt{x}} \cdot 3 - 39 \cdot 3^{\sqrt{x}-1} + 12 = 0$$

$$3t^2 - 13t + 12 = 0$$

$$3t^2 - 9t - 4t + 12 = 0$$

$$3t(t-3) - 4(t-3) = 0$$

$$(t-3)(3t-4) = 0$$

$$t = 3 \qquad t = \frac{4}{3}$$

$$3^{\sqrt{x}} = 3$$

$$\sqrt{x} = 1$$

$$x = 1$$

נפסל

$$3^{\sqrt{x}} = \frac{4}{3}$$

$$\sqrt{x} = \log_3 \frac{4}{3}$$

$$\boxed{x = \left(\log_3 \frac{4}{3}\right)^2}$$

א 5 שאלה

$$\sqrt{x^2-2x+3} > \sqrt{2\sqrt{x^2-2x+2}}$$

$x^2-2x+3 \geq 0$ | x^2-2x+2
כל x | כל x
$\Delta < 0$ | $\Delta < 0$

$$x^2-2x+3 > 2\sqrt{x^2-2x+2}$$

$t = x^2-2x+2$:הצבה

$$t+1 > 2\sqrt{t}$$

$t+1<0$ | $t+1 \geq 0 \Rightarrow t \geq -1$
ϕ | $t^2+2t+1 > 4t$
 | $(t-1)^2 > 0$
 | $t \neq 1$

$\Rightarrow t > -1$

$\Downarrow$

$x^2-2x+2 > 1$

$x^2-2x+1 > 0$

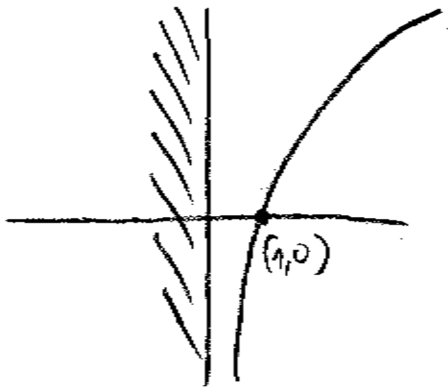
$(x-1)^2 > 0$

תשובה $x \neq 1$

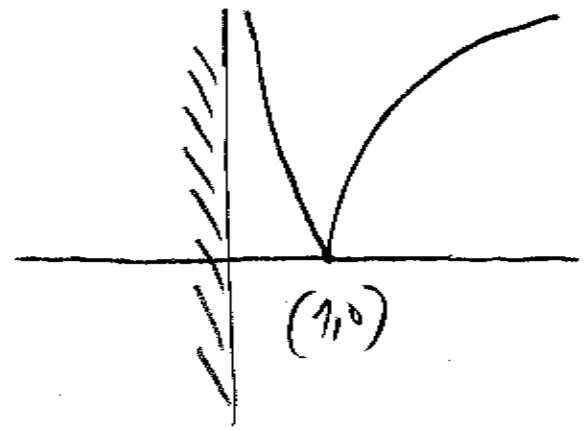
שאלה 5

1 ב

$y=\log_3 x$ $\quad x>0$



$y=|\log_3 x|$

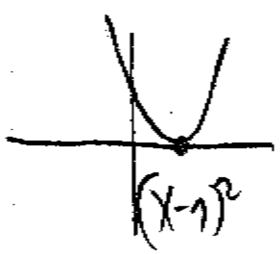


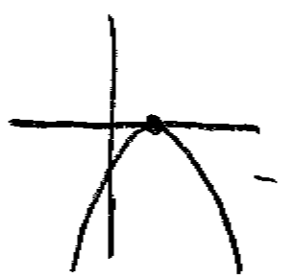
$-x^2+2x+a$

$-x^2+2x-1+1+a$

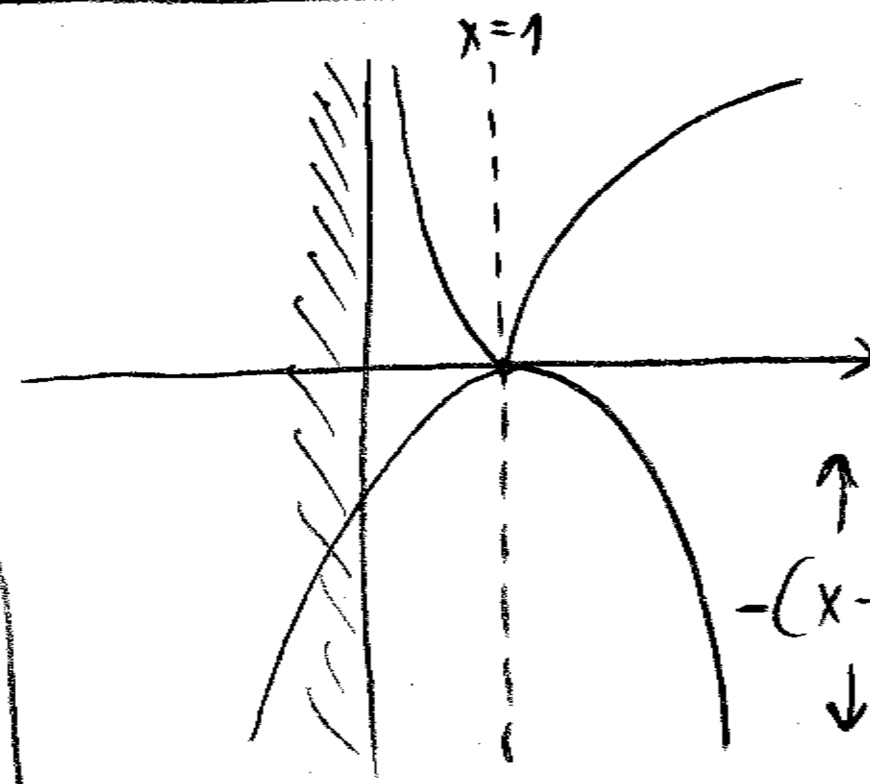
$-(x^2-2x+1)+1+a$

$-(x-1)^2+(1+a)$





2



↑ עולה

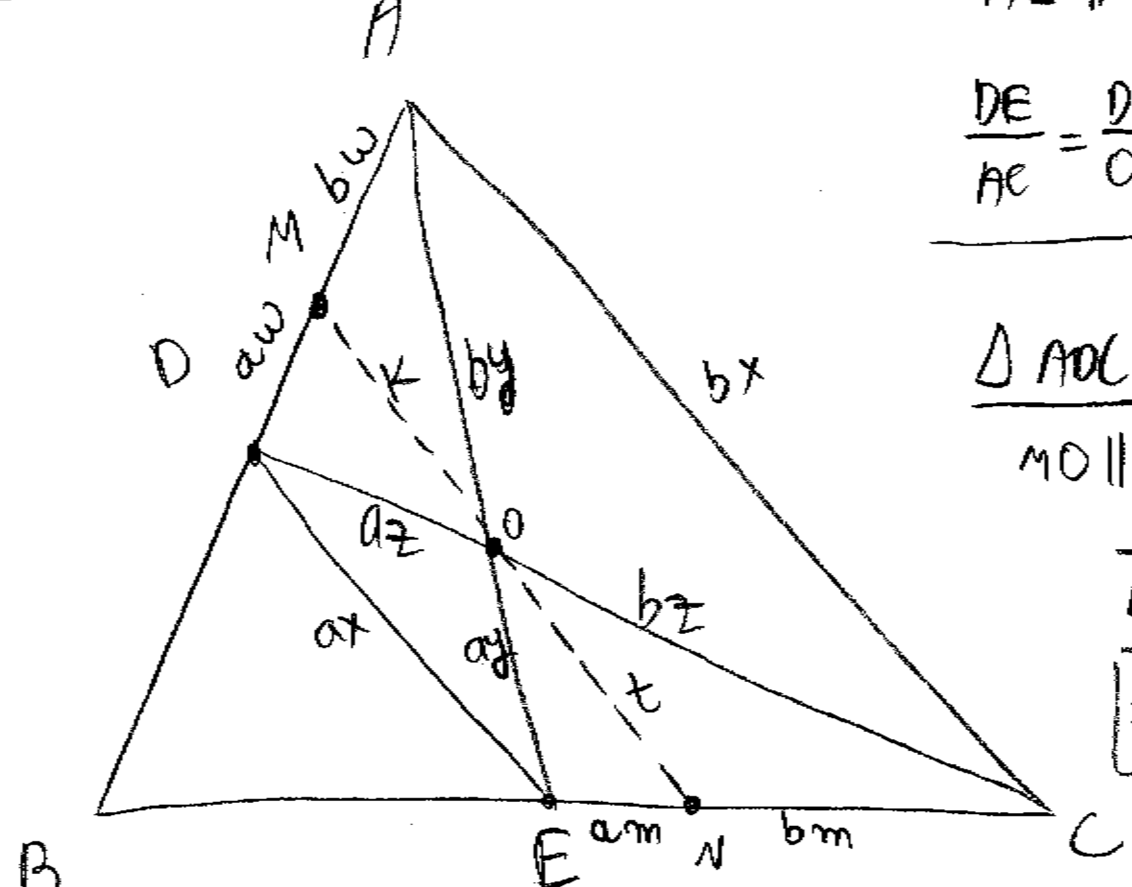
↓ יורד

$$-(x-1)^2+\underbrace{(1+a)}$$

מעלה ומוריד את הפרבולה

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{פתרון יחיד} & 1+a=0 \Rightarrow a=-1 \\ \text{אין פתרון} & 1+a<0 \Rightarrow a<-1 \\ \text{שני פתרונות} & 1+a>0 \Rightarrow a>-1 \end{array}}$$

Gr fke



$AC \parallel DE$ (ofb)

$$\frac{DE}{AC} = \frac{DO}{OC} = \frac{EO}{OA} = \frac{a}{b}$$

(2)

ofh

Δ ADC:

$MO \parallel AC$

$$\frac{k}{bx} = \frac{az}{(a+b)z}$$

$$\boxed{k = \frac{abx}{a+b}}$$

ɔ Jern

Δ EAC: (ofs)

$$\frac{t}{bx} = \frac{ay}{(a+b)y}$$

$$\boxed{t = \frac{abx}{a+b}}$$

(t)

Δ ADC:

(ofs) $\frac{MO}{AC} = \frac{MD}{AD}$

k Jern

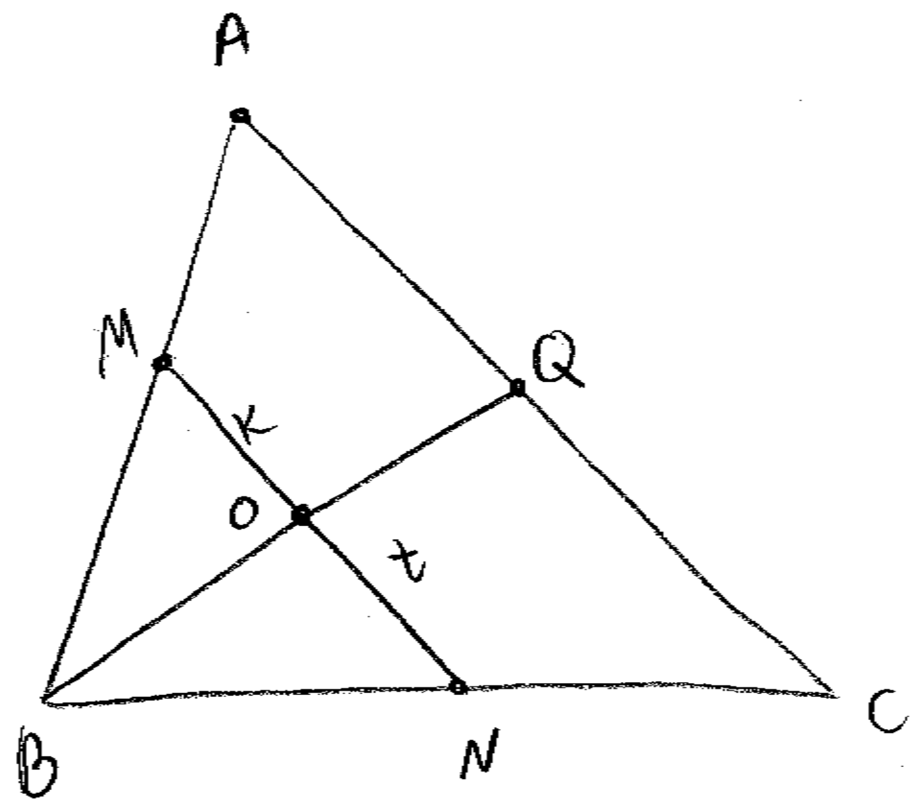
Δ EAC:

$$\frac{NO}{AC} = \frac{NE}{EC}$$

(ofs)

k Jern

2



נחבר את B עם O.

המשך BO חותך את AC

בנקודה Q

נוכיח $AQ=QC$

$\underline{\Delta BQA}$: $\underline{\Delta BQC}$:

$$\frac{t}{QC}=\frac{BO}{BQ}=\frac{K}{AQ}$$

$$\frac{t}{QC}=\frac{K}{AQ} \qquad t=K$$

$$\Downarrow$$

$QC=AQ$ מ.ש.ל.

FRI 27-DEC-2013 12:31 CASEG FAX No. 00144773882 P.013